

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

中年級學童加減概念之研究：比較問題

計畫類別：X 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 89 - 2413 - H - 004 - 017 -

執行期間： 89 年 8 月 1 日至 90 年 7 月 31 日

計畫主持人：蔣治邦

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立政治大學心理系

中 華 民 國 90 年 7 月 31 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

中年級學童加減概念之研究：比較問題

Concepts of Addition and Subtraction in Middle Grades: Compare Problems

計畫編號：NSC 89-2413-H-004-017

執行期限：89年8月1日至90年7月31日

主持人：蔣治邦 國立政治大學心理系

一、中文摘要

分析比較文字題的文本，它包含被比較量的宣告、參照量的宣告與比較結果三個語句描述，本計畫透過改寫的過程，對差異量、被比較量與參照量未知的比較問題，各產生三種語句順序的問題呈現方式，對759名國小二下、三上、三下與四上學童進行測試，探討未知數角色、語句順序與年級時段對解題的影響。

在含比多關係句的問題中，學童在「被比較量描述—參照量描述—比較結果描述」（簡稱「被—參—比」）順序時的解題表現優於「參—比—被」或「被—比—參」順序，四上與三下學童的解題表現優於二上，差異量未知問題上的解題表現最好，參照量未知問題次之，被比較量未知問題最困難，而且年級時段與未知數角色具有交互作用。相對地，在含比少關係句的問題中，發現參照量未知問題最困難，綜合而言，學童解題表現趨勢建議：部份學童可能使用「減法策略」來因應比較問題；「被—參—比」順序描述契合生活中較常遇到兩已知量比較的「配對」情境，使得「被—參—比」順序描述較易被學童理解，而形成較佳的解題表現。

關鍵詞：問題基模的發展，加、減比較問題，語句順序效果

Abstract

Analyzing the text of compare word problems, it consists of an assignment statement of compared quantity(C), an assignment statement of referent quantity(F)

and a relational statement of comparison(R). Through rewriting processes, three versions of problem text with different orders of difference unknown, compared unknown, or referent unknown compare problems. There were 759 students participated in the study. They were 2nd and 3rd graders at their 2nd semester or 3rd and 4th graders at their 1st semester. This study was to inspect the effects of the role of unknown, the order of statements and the grade levels of students on problem solving performance.

In the "more than" problems, it was found those students' performance was better with the C-F-R order of problem presentation rather than with the F-R-C or the C-R-F orders. Fourth graders and 3rd graders at their 2nd semester did better than 2nd graders. The effect of the role of unknown has shown that difference unknown was the easiest problem to be solved, referent unknown was the next, and compared unknown was the hardest one. It also revealed an interaction effect between the role of unknown and the grade levels. In the "less than" problems, only the effect of the role of unknown has revealed. It has shown the referent unknown problems were the most difficult ones to be solved. Over all, the students' performance data suggested that some students might use a "subtraction strategy" to answer all kinds of compare problems. The C-F-R order of problem presentation, which is more coherent with the compare situations in everyday life, made the problems easy to be comprehended, and resulted a better performance.

Keywords : development of problem schemata, compare word problems, the effect of statement order.

二、緣由與目的

比較問題涉及兩個互斥集合 A、B 之間的比較，在「A 比 B 多（少） $n(D)$ 個」的關係句中，通常稱 $n(A)$ 指示的量為「被比較量」， $n(B)$ 為「參照量」，而集合 D 的量由 $|n(A) - n(B)|$ 推論決定（Fuson, Carroll & Landis, 1996）稱為「差異量」，以兩種比較方向（比多或比少）以及三種未知數角色（差異量未知、被比較量未知或參照量未知），可以組合成六種單一步驟的加成性比較問題（參見表一中典型的比較問題）。在加、減運算文字題中，比較問題是較難的，尤其是參照量未知問題（翁嘉英、鄭昭明, 1988; 蔣治邦、鍾思嘉, 1991; 謝毅興, 1991; Carpenter, 1985; Christou & Philippou, 1998; Lewis, 1989; Lewis & Mayer, 1987; Okamoto, 1996; Riley, Greeno & Heller, 1983）。

〔插入表一〕

在諸多嘗試解釋不同類型加、減文字題相對難度的理論模型中，Nesher, Greeno 和 Riley(1982)提出問題基模發展模式，側重集合關係表徵或數理 - 邏輯能力發展，來解釋未知數角色對問題解決的影響。相對地，研究亦發現語文因素對問題解決的影響，Lewis 和 Mayer(1987)提出情境語文描述與解題運算的一致性假說(consistency hypothesis)：當關係描述(例如「比...多」)與正確運算(例如：加法)一致時，則學童較易產生正確解答，若關係描述與正確運算不一致，則產生較多的錯誤，因而預測參照量未知問題較難理解，且錯誤為選錯運算，重述問題(retelling)資料(Kintsch, 1986; Verschaffel, 1994)亦顯示：當解決參照量未知問題產生錯誤後，要求回憶重述原始問題，解答者將原始問題改為被比較量未知問題。

Hudson(1983)的研究結果更凸顯了語文理解對問題解決的影響，在改寫傳統差異量未知問題描述的情境下，例如：用圖

畫呈現 5 隻小鳥和 4 條蚯蚓的情境下，改用「多少隻小鳥吃不到蚯蚓？」來取代「小鳥比蚯蚓多幾隻？」的問話，發現當問題中強調配對的行動時，幼稚園或一年級學童皆有較佳的表現。

學童是透過閱讀問題文本，來理解問題情境，文本是線性呈現的，當學童用行動模擬方式來理解問題情境時，文本中語句的次序，會影響解題的難度（蔣治邦, 1993; Teubal & Nesher, 1991; Cohen & Stover, 1981; Rosenthal & Resnick, 1974）。分析比較問題的文本(text)，它包含被比較量的宣告描述、參照量的宣告描述與比較的關係描述，在目前數學課程中，差異量未知問題通常以「被比較量描述—參照量描述—比較關係描述(問話)」的語句順序呈現，簡稱「被—參—比」順序，被比較量未知問題的語句順序常為「參照量描述—比較關係描述—被比較量描述(問話)」(簡稱「參—比—被」順序)，參照量未知問題的語句順序常為「被比較量描述—比較關係描述—參照量描述(問話)」(簡稱「被—比—參」順序)。本研究透過改寫的過程，對差異量未知、被比較量未知與參照量未知問題，各產生三種語句順序的問題描述(參見表一)，選擇二下、三上、三下與四上的學童進行測試，探索未知數角色與語句順序對解題的影響。

三、結果與討論

選定 4 個「比多」情境，依選定的未知數角色與語句順序，分別撰寫九組(各 4 題)比多問題，比少問題的設計與比多問題相同。九組比多問題與九組比少問題配對呈現於九份題本中，每份題本中包含控制、比多與比少問題各四題，九份題本的控制題相同，由 4 題改變問題組成。五所國小二下、三上、三下與四上的學童(共 759 人)參與實驗，分別在上、下學期進行班級團體測試，在各班級內區組化隨機分派題本。比多與比少問題的學童解題表現摘要於表二。

〔插入表二〕

對比多問題進行 3 (未知數角色) X 3 (語句順序) X 4 (年級時段) 的三因子變異數分析, 三因子皆為受試者間變項, 分析結果顯示顯著的語句順序效果, $F_{2,723} = 6.63$, $MSE = 1.40$, $p < .01$, 經由 Scheffé 事後比較, 學童在「被—參—比」順序問題敘述時的解題表現優於「參—比—被」順序 ($S = 3.07$, $p < .01$) 或「被—比—參」順序 ($S = 2.84$, $p < .01$)。年級時段主要效果 ($F_{3,723} = 6.70$, $MSE = 1.40$, $p < .01$)、未知數角色主要效果 ($F_{2,723} = 64.53$, $MSE = 1.40$, $p < .01$) 及兩者間二因子交互作用 ($F_{6,723} = 4.65$, $MSE = 1.40$, $p < .01$) 亦皆達顯著, 經由 Scheffé 事後比較, 四上 ($S = 4.44$, $p < .01$) 與三下 ($S = 2.90$, $p < .05$) 學童的解題表現優於二上, 學童在差異量未知問題上的解題表現優於被比較量未知問題 ($S = 10.96$, $p < .01$) 或參照量未知問題 ($S = 2.55$, $p < .05$), 在參照量未知問題上的解題表現優於被比較量未知問題 ($S = 8.48$, $p < .01$), 二上學童在差異量未知與被比較量未知問題上的解題表現差異顯著地大於四下學童 ($S = 4.01$, $p < .05$), 而且二上學童在參照量未知與被比較量未知問題上的解題表現差異顯著地大於四下學童 ($S = 4.57$, $p < .01$)。其他的二因子或三因子交互作用則皆未達顯著。

對比少問題同樣地進行 3 (未知數角色) X 3 (語句順序) X 4 (年級時段) 的三因子變異數分析, 三因子皆為受試者間變項, 分析結果僅顯示顯著的未知數角色效果, $F_{2,723} = 135.64$, $MSE = 1.17$, $p < .01$, 其他效果則皆未達顯著。經由 Scheffé 事後比較, 學童在參照量未知問題上的困難顯著地多於差異量未知問題 ($S = 13.77$, $p < .01$) 或被比較量未知問題 ($S = 14.67$, $p < .05$)。

綜合而言, 涉及集合關係推理能力的未知數角色因素, 明顯地影響學童解題表現, 但是, 比多問題中被比較量未知問題最困難, 比少問題中參照量未知問題最困難, 此兩類問題恰好皆需要進行加法運算, 而其他的比較問題皆為減法運算, 此

趨勢反映部份學童可能使用「減法策略」來因應比較問題(翁嘉英、鄭昭明, 1988), 而使需加法運算的問題產生較多的錯誤, 換言之, 正確解答比少被比較量未知(比較 4) 或比多參照量未知(比較 5) 問題, 未必反映學童擁有集合比較關係的推理能力(Nesher et al., 1982), 使用「減法策略」恰好可以正確解答比較 4、5 問題。

Fuson 等人(1996)認為現實生活中較常遇到兩已知量比較的「配對」情境, 「被—參—比」順序描述契合「配對」情境, 先注意兩量的宣告, 再注意比較結果, 此契合關係可能使得「被—參—比」順序描述較易被學童理解, 而形成較佳的解題表現。

合併觀察未知數角色效果、語句順序效果以及年級時段與未知數角色的交互作用, 建議學童先發展「配對」的觀點來理解比較問題, 較晚發展「等化」的觀點, 在尚未發展集合比較關係的推理能力前, 學童可能過度類化「配對」觀點成「減法策略」來因應所有類型的比較問題。

四、計畫成果自評

學童解題資料所建議的理解方式發展模型, 進一步地釐清比較問題的困難, 本研究發現的語句順序效果, 更值得作為國小數學教材編撰的參考。教師宜認知到學童可能發展出不適當的「減法策略」, 而忽略了問題中的比較關係描述, 適時的要求學童反省與澄清其解法, 將有助於學童的學習。

部份選擇的國小班級中的人數太少, 研究過程中未及時發現, 以致未聯絡更多的學校參與實驗, 使得部份與年級時段的交互作用雖有效果趨勢, 但無足夠的統計考驗力來進行宣告。

五、參考文獻

翁嘉英、鄭昭明。(1988)。國小兒童解數學應用題的認知歷程。見梁雲霞主編：「七十七年國小課程研究學術研討會專輯」, 頁 109-137。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。

- 蔣治邦、鍾思嘉。(1981)。低年級學童加減概念的發展。「教育心理與研究」, 14 : 35-68。
- 蔣治邦。(1983)。中年級學童解決加減文字題能力之探討:多餘資訊與兩步驟問題。「科學教育學刊」, 1(2) : 189-212。
- 謝毅興。(1981)。「國小兒童解數學應用問題的策略」。國立台灣大學心理學研究所未發表之碩士論文。
- Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. In E. A. Silver (Ed.). Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp.17-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Christou, C., & Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 29(4) : 436-442.
- Cohen, S. A., & Stover, G. (1981). Effects of teaching six-grades students to modify format variables of math word problems. Reading Research Quarterly, 16 : 175-200.
- Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Landis, J. (1996). Levels in conceptualizing and solving addition and subtraction compare word problems. Cognition and Instruction, 14(3): 345-371.
- Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. Child Development, 54 : 84-90.
- Kintsch, W. (1986). Learning from text. Cognition and Instruction, 3(2) : 87-108.
- Lewis, A. B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 81(4) : 521-531.
- Lewis, A. B., & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 79(4) : 363-371.
- Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. Educational Studies in Mathematics, 13 : 373-394.
- Okamoto, Y. (1996). Modeling children's understanding of quantitative relations in texts: A developmental perspective. Cognition and Instruction, 14(4) : 409-440.
- Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.). The development of mathematical thinking (pp.153-196) New York: Academic Press.
- Rosenthal, D. J. A., & Resnick, L. B. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 66 : 817-825.
- Teubal, E., & Nesher, P. (1991). Order of mention vs. order of events as determining factors in additive word problems: A developmental approach. In K. Durkin & B. Shire(Eds.) Language in mathematical education: Research and practice (pp. 131-139). Bristol, PA: Open University.
- Verschaffel, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2) : 141-165.

表一

相同比較情境、同一組數字下，九種比多或比少問題題型撰寫的實例。

語句順序 問題類型		被 - 參 - 比	參 - 比 - 被	被 - 比 - 參
比 多 問 題	差異量 未知 (比較 1)	小英有 62 顆彈珠，小明有 21 顆彈珠，請問小英比小明多幾顆彈珠？	小明有 21 顆彈珠，請問小英比小明多幾顆彈珠時，小英會有 62 顆彈珠？	小英有 62 顆彈珠，請問小英比小明多幾顆彈珠時，小明有 21 顆彈珠？
	被比較量 未知 (比較 3)	小英有一些彈珠，小明有 21 顆彈珠，小英比小明多 62 顆彈珠，請問小英有幾顆彈珠？	小明有 21 顆彈珠，小英比小明多 62 顆彈珠，請問小英有幾顆彈珠？	小英有一些彈珠，小英比小明多 62 顆彈珠，小明有 21 顆彈珠，請問小英有幾顆彈珠？
	參照量 未知 (比較 5)	小英有 62 顆彈珠，小明有一些彈珠，小英比小明多 21 顆彈珠，請問小明有幾顆彈珠？	小明有一些彈珠，小英比小明多 21 顆彈珠，小英有 62 顆彈珠，請問小明有幾顆彈珠？	小英有 62 顆彈珠，小英比小明多 21 顆彈珠，請問小明有幾顆彈珠？
比 少 問 題	差異量 未知 (比較 2)	小華有 21 條橡皮筋，小美有 43 條橡皮筋，請問小華比小美少幾條橡皮筋？	小美有 43 條橡皮筋，請問小華比小美少幾條橡皮筋時，小華會有 21 條橡皮筋？	小華有 21 條橡皮筋，請問小華比小美少幾條橡皮筋時，小美有 43 條橡皮筋？
	被比較量 未知 (比較 4)	小華有一些橡皮筋，小美有 43 條橡皮筋，小華比小美少 21 條橡皮筋，請問小華有幾條橡皮筋？	小美有 43 條橡皮筋，小華比小美少 21 條橡皮筋，請問小華有幾條橡皮筋？	小華有一些橡皮筋，小華比小美少 21 條橡皮筋，小美有 43 條橡皮筋，請問小華有幾條橡皮筋？
	參照量 未知 (比較 6)	小華有 43 條橡皮筋，小美有一些條橡皮筋，小華比小美少 21 條橡皮筋，請問小美有幾條橡皮筋？	小美有一些橡皮筋，小華比小美少 21 條橡皮筋，小華有 43 條橡皮筋，請問小美有幾條橡皮筋？	小華有 43 條橡皮筋，小華比小美少 21 條橡皮筋，請問小美有幾條橡皮筋？

註：文字題前有 號者，為該類問題一般使用的語句順序。

表二

學童在比多或比少問題上的解題表現

問題類型		組別		二下			三上			三下			四上			
		語句	順序	被-參-比	參-比-被	被-比-參	被-參-比	參-比-被	被-比-參	被-參-比	參-比-被	被-比-參	被-參-比	參-比-被	被-比-參	
比 多 問 題	差異量 未知 (比較 1)	A ^a	3.95 ^b (0.22) 20	B	3.13 (1.60) 23	C	3.86 (0.65) 21	3.95 (0.21) 22	2.79 (1.65) 19	3.79 (0.42) 19	3.86 (0.35) 22	3.62 (0.92) 21	3.73 (0.63) 22	3.86 (0.35) 22	3.82 (0.66) 22	3.75 (0.79) 20
	被比較量 未知 (比較 3)	D	1.65 (1.67) 23	E	1.55 (1.73) 20	F	2.05 (1.91) 21	3.29 (1.27) 21	2.67 (1.71) 21	2.06 (1.92) 18	2.90 (1.61) 21	2.62 (1.53) 21	2.14 (1.62) 21	3.30 (1.34) 20	3.25 (1.48) 20	2.85 (1.57) 20
	參照量 未知 (比較 5)	G	3.48 (1.01) 25	H	3.33 (0.86) 21	I	3.29 (0.90) 21	3.55 (0.96) 22	3.35 (1.09) 20	3.20 (1.06) 20	3.67 (0.66) 21	3.59 (0.67) 22	3.24 (0.94) 21	3.62 (0.86) 21	3.27 (1.12) 22	3.35 (1.03) 23
比 少 問 題	差異量 未知 (比較 2)	F	3.95 (0.22) 21	D	3.57 (1.08) 23	E	3.55 (0.89) 20	3.61 (0.98) 18	3.48 (1.12) 21	3.76 (0.62) 21	3.71 (0.56) 21	3.81 (0.51) 21	3.57 (1.21) 21	4.00 (0.00) 20	4.00 (0.00) 20	3.60 (1.10) 20
	被比較量 未知 (比較 4)	H	3.71 (0.46) 21	I	3.81 (0.40) 21	G	3.72 (0.54) 25	3.95 (0.22) 20	3.80 (0.89) 20	3.82 (0.39) 22	3.91 (0.29) 22	3.95 (0.22) 21	3.57 (1.08) 21	3.95 (0.21) 22	3.52 (1.04) 23	3.76 (0.70) 21
	參照量 未知 (比較 6)	B	2.04 (1.52) 23	C	1.95 (1.50) 21	A	1.90 (1.55) 20	2.37 (1.71) 19	2.26 (1.76) 19	2.59 (1.50) 22	2.67 (1.39) 21	2.32 (1.59) 22	2.41 (1.82) 22	2.55 (1.57) 22	2.65 (1.50) 20	2.86 (1.49) 22

a：二下欄位左側顯示的是題本別，各年級均同。

b：細格內由上而下分別為平均數、標準差、人數。

