行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※
※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※
※　　降低權利金的權證創新，評價及避險　　※
※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※
※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：■個別型計畫　　□整合型計畫
計畫編號：NSC90-2416-H-004-014
執行期間：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

計畫主持人：陳松男　教授

本成果報告包括以下應繳交之附件：

□赴國外出差或研習心得報告一份
□赴大陸地區出差或研習心得報告一份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：政治大學金融學系

中　華　民　國　九十一　年　　月　　日

On Creating and Pricing Premium Reducible Simple Warrants

探討可降低權利金之簡單權證創新及評價

陳松男

國立政治大學金融學系教授
國立政治大學商學院財務工程暨衍生性
商品研究中心主任

摘要

近來有不少券商相繼推出不同新類型的認購權證，其中以可降低權利金的權證很受投資人歡迎。本論文將詳細介紹幾種可降低權利金的簡單新權證，並以 Martingale Pricing 的方法推導出各種新權證的封閉解評價模型，同時推導出相關的避險參數。

本論文的方法可進一步應用於其他可降低權利金的新權證創新，不但投資人受益，發行券商也因新權證評價模型的簡單化以及類似 Black-Scholes 避險操作的簡易性，獲得更佳的風險控管，因此可降低避險損失，提升利潤。

關鍵詞：Martingale Pricing、減縮部分權利金的權證、上限型權證、局部支付型權證、抵付型權證、變化類型權證。

Abstract

Several security firms have recently issued a variety of new Warrants. Among them, reduced-premium warrants are highly welcomed by investors. In this paper, we introduce in great details several lower-premium new warrants. Each new warrant can be priced by a closed-form solution derived from martingale pricing method, and the related hedge parameters are also derived. The martingale pricing method can be applied to other related new lower premium warrants. The investors will be benefited from the availability of lower-premium warrants in the market. In addition, the issuing security firms can also be benefited from the new warrants closed-form pricing models. The hedge parameters are as simple as those of the Black-Scholes model. As a result, the issuing firms can enjoy better risk control and hence lowering hedging losses and raising profits.

壹、前言

為降低權利金及吸引投資人購買認購權證的興趣，近來不少綜合券商相繼創新發行多種認購權證，諸如上出局認購權證（Up-and-Out Calls）、上限型權證、回顧型重設權證（Look-Back and Reset Calls），市價定期重設權證等等證券。對投資人而言，這些權證不但陌生且難懂。投資人只好從權利金是否便宜的觀念做判斷，只要發行價格低，則競相購買，搶購一空。因此，就發行券商而言，只要權證能夠在發行期間內完成促銷，獲利的機會很高。低權利金是個很好的買點。但若為了降低權利金而設計一些複雜且難以評價及避險的權證，則會增加發行權證的風險，並且權利金的決定也很可能出現不合理的價位。因此，若能設計一些簡單且能降低權利金的權證，投資人不但受益，發行券商也比較容易決定權證的合理價位，且在避險方面也不複雜，風險自然降低。

選擇權的創新種類不勝枚舉，這些創新的商品都是屬於所謂的新奇選擇權（Exotic Options），諸如亞洲選擇權（Asian Options），入局或出局選擇權（Knock-in or Knock-out Options），回顧型選擇權（Look-Back Options），擇選選擇權（Chooser Options），匯率連動選擇權（Quanto Options），遠期生效選擇權（Forward-Start Options）等等。這些新奇選擇權是因應避險者及投資人的不同需求而設計創新。但其到期現金流量完全不同於一般歐式選擇權的到期現金流量。一般投資人很難了解其之所以然。因此，若吾人能對 Black-Scholes 選擇權的簡單到期現金流量做簡單的修正調整，仍能使一般投資人容易了解，並可降低購買權證的成本，則定會吸引投資人的興趣。就作者所知，目前仍然沒有基於 Black-Scholes 選擇權的簡單權證設計創新。可能因為國外金融創新相關法令早於 1980 年代已鬆綁，法人機構可就避險者及投資人的不同需求，設計創新種類繁多的新奇選擇權。但我國相關法令尚未鬆綁，法人機構只能設計簡單權證來滿足投資人的需要。因此，本論文的研究正適合目前國內嚴謹法令規範下的簡單權證設計創新。以 Martingale Pricing 的方法對這些新權證尋求封閉解（Closed-Form Solutions）的評價模型，以及提供相關重要的避險參數（Hedging Parameters），諸如 Delta、Gamma 及 Vega。此外，這些新權證創新的構想是將一般權證的到期現金流量（The Final Payoff）加以修正調整，稍微降

的到期現金流量（The Final Payoff）加以修正調整，稍微降低或只支付部分的到期現金流量，以期達到降低權證的權利金，符合投資人欲降低權證的購買成本。此外，這些新權證的優點在於具有 Black-Scholes 評價模型之簡單特徵，避險參數也容易求解。

雖然台灣權證均為美式權證，但因現金股利調整的結果，它像似歐市權證。當標的股在到期前發配現金股利時，按照證期會規定，履約價格必須往下修正調整。因此，現金股利對權證的不產生影響。在這種情況下，美式認購權證的標的股可視為無現金股利的股票。因此，從理論而言，美式認購權證可視為歐式權證（至少很接近）。此外，台灣投資人極少在到期前行使提前執行，因此，雖是美式權證，但實際已幾乎是歐式權證。所以，歐式權證的評價模型仍適用於台灣的權證，而不會產生顯著誤差。這解釋為何台灣實務界均以歐式模型來評價台灣權證。

本論文的結構如下。第二節將會介紹六種不同類型的新權證，並推導出每一新權證的封閉解評價模型以及相關的避險參數。第三節對本論文作總結論。

貳、新商品創新及評價

在本節中，我們將逐一研討可降低權利金的新認購權證（歐式）。這些新權證簡單易懂。權證權利金的決定可由封閉解準確求出。避險參數（Hedge Parameters）也可由封閉解的評價模型加以決定，對避險操作有很大的助益。在下文中，我們將逐一研討分析。

一、減縮部份權利金的權證（Call Options With Proportional Payoff）

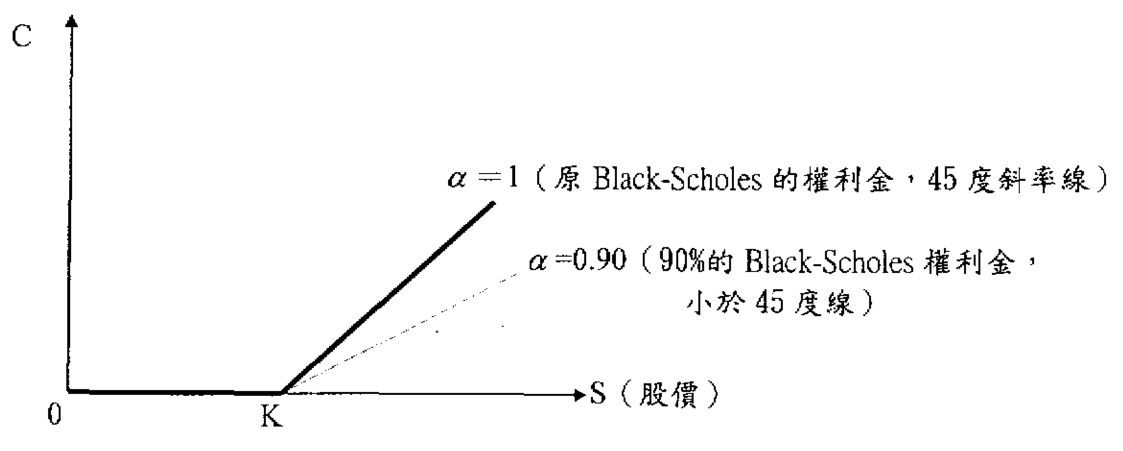
我們首先介紹最簡單的權證。若將普通認購權證（以後簡稱權證）到期時的價值或現金流量調降某一百分比 α，則新權證的權利金將可以相同的百分比率降低，如下：

$$C_T = \alpha \max(S_T - K, 0) \tag{1}$$

此處：C_T=新權證到期時的現金流量，S_T=標的到期時的價格，K=履約價格，α（<100%）是調降的百分比率，例如：α=0.90，0.85等等。T=到期時間。

以圖一表示如下：

圖一 到期現金流量部份減縮的權證



（為簡單計，橫軸下的權利金圖省略）

此種新權證的權利金其實是 Black-Scholes（簡稱 BS）權利金的 α 比率。因此該權證的評價模型即是 BS 模型乘以 α。以公式表示如下[註1]：

$$C = \alpha\left[Se^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)\right] \tag{2}$$

此處：q＝ 標的股的連續股息，r＝無風險利率

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)\cdot T}{\sigma\sqrt{T}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S=標的股的現在價格（t＝0）

σ＝標的股的連續報酬率瞬間標準差

N(x)=標準常態分配的累積機率 ＝ $\int_{\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}dx$

該權證的避險參數即是 BS 模型避險參數乘以 α：

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \alpha e^{-qT}N(d_1) \tag{3}$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\alpha e^{-qT}}{\sigma S\sqrt{T}}n(d_1) \text{，} n(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2} \tag{4}$$

$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \alpha Se^{-qT}n(d_1)\sqrt{T} \tag{5}$$

二、上限型權證（Capped Calls）

此種權證到期時的價值（或現金流量）如下：

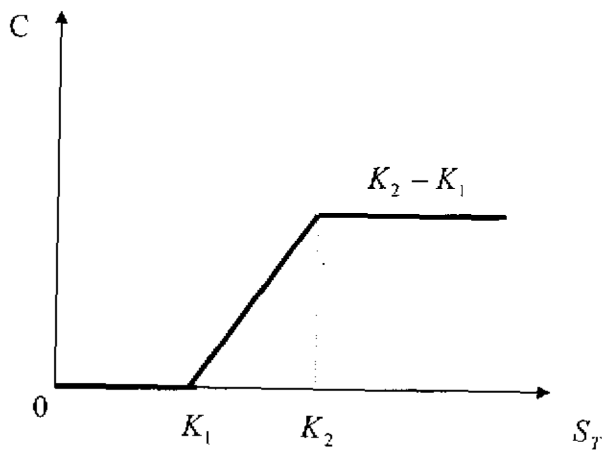
$$C_T = \begin{cases} 0 & \text{若 } S_T \le K_1 \\ S_T - K_1 & \text{若 } K_1 < S_T < K_2 \\ K_2 - K_1 & \text{若 } S_T \ge K_2 \end{cases} \tag{6}$$

[註1] 我們仍然採用 Black-Scholes 的假設。標的股價呈現幾何布朗運動：

$dS = rSdt + \sigma Sd_W^Q$，Q 代表 risk-neutral measure。

以圖二表示其現金流量如下：

圖二 上限型權證之現金流量



解釋如下：

（一） 在到期時，若標的價格（S_T）小於或等於履約價格（K_1），則該權證價格為零（C_T=0），與一般買權的到期價值相同。

（二） 在到期時，若標的價格介於K_1及K_2之間（$K_1<S_T<K_2$），該權證的價值為標的價格減掉履約價格（S_T-K_1），這與一般買權相同。

（三） 若$S_T\geq K_2$，則權證的價值受到上限（K_2-K_1）的限制，這與一般買權價值的決定（S_T-K_2）不同。這就是因為該權證的價值受到上限的約束，因此其權利金得以降低。若K_2的設定越遠離K_1，則該權證越接近一般的買權。因此，所節省的權利金越少。

在風險中立下，上限型權證的評價模型可根據上面該權證到期的現金流量，以無風險利率折現，並可以下列公式代表之：

$$C=e^{-rT}E^{Q}\left[(S_T-K_1)1_{\{K_1<S_T<K_2\}}\right]+e^{-rT}E^{Q}\left[(K_2-K_1)1_{\{S_T\geq K_2\}}\right] \qquad (7)$$

此處：1_A 代表指標函數（Indicator Function），其定義如下：

$$1_A = \begin{cases} 1 & \text{若 A 成立（或出現）} \\ 0 & \text{若 A 不成立（或不出現）} \end{cases}$$

所以，

$$(S_T - K_1)1_{\{K_1<S_T<K_2\}} = \begin{cases} S_T - K_1 & \text{若 } K_1 < S_T < K_2 \\ 0 & \text{若 } S_T \text{ 不在 } K_1 \text{ 及 } K_2 \text{ 之間（即 } S_T \le K_1 \text{ 或 } S_T \ge K_2 \text{）} \end{cases}$$

$$(K_2 - K_1)1_{\{S_T \ge K_2\}} = \begin{cases} K_2 - K_1 & \text{若 } S_T \ge K_2 \\ 0 & \text{若 } S_T < K_2 \end{cases}$$

E^Q 代表風險中立機率測度 Q（The Risk-Neutral Probability Measure Q）下的期望值。

評價模型（7）可藉由 Martingale Pricing 及 Girsanov Theorem 求得，表示如下：（詳見附錄一的證明）

$$\begin{aligned} C &= Se^{-qT}\left[N(d_1^*) - N(d_2^*)\right] + e^{-rT}\left[K_2N(d_2') - K_1N(d_1')\right] \\ &= \left[Se^{-qT}N(d_1^*) - K_1e^{-rT}N(d_1^* - \sigma\sqrt{T})\right] - \left[Se^{-qT}N(d_2^*) - K_2e^{-rT}N(d_2^* - \sigma\sqrt{T})\right] \\ &= \text{The Black} - \text{Scholes Call}\,(\mathrm{K}_1) - \text{The Black} - \text{Scholes Call}\,(\mathrm{K}_2) \end{aligned}$$

(8)

此處：$d_1^* = \dfrac{\ln(S/K_1) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$

$$d_1' = \frac{\ln(S/K_1) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1^* - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_2' = \frac{\ln(S/K_2) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_2^* - \sigma\sqrt{T}$$

評價模型（8）只涉及常態分配機率，計算很簡單。其避險參數也很容易求得，表示如下：(詳見附錄二的推導)

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-qT}\left[N(d_1^*) - N(d_2^*)\right] \tag{9}$$

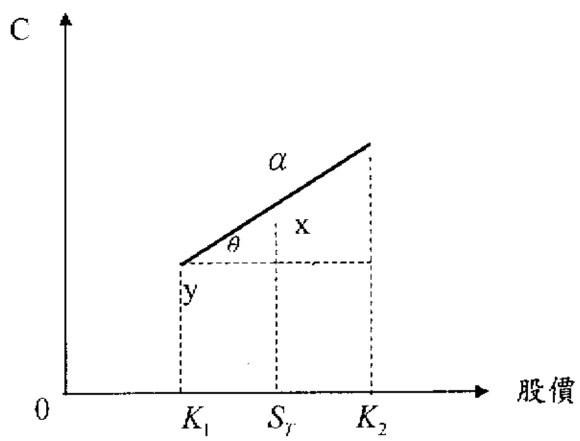
$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = e^{-qT}\left[\frac{n(d_1^*)}{\sigma S\sqrt{T}} - \frac{n(d_2^*)}{\sigma S\sqrt{T}}\right] \tag{10}$$

$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Se^{-qT}\sqrt{T}\left[n(d_1^*) - n(d_2^*)\right] \tag{11}$$

三、 局部支付型權證

局部支付型權證（Payoff Segment Calls）在到期時的價值先由圖三表示如下：

圖三 局部支付型權證



以公式表示如下：

$$C_T=\begin{cases}0 & 若\ S_T<K_1\\ x+y=y+\alpha(S_T-K_1) & 若\ K_1\le S_T\le K_2\\ 0 & 若\ S_T>K_2\end{cases}\qquad (12)$$

此處α代表支付報酬的斜度（$\alpha=1$，$\alpha<1$，或$\alpha>1$），

$$\alpha=\tan\theta=\frac{x}{S_T-K_1}\Rightarrow x=\alpha(S_T-K_1)$$

該權證的期終價值解釋如下：

（一）在到期（T）時，若標的股價S_T低於K_1，或大於K_2時，權證價值為零（即若$S_T<K_1$或$S_T>K_2$，則$C_T=0$）。

（二）在 T 時，若標的股價介於K_1及K_2之間$(K_1\le S_T\le K_2)$，權證的價值為$y+\alpha(S_T-K_1)$。y 為$S_T=K_1$時的權證價值。斜率α可調整為大於、小於或等於 1（即$\alpha>1$，$\alpha<1$，或$\alpha=1$）。若$\alpha=1$時，權證的價值剛好等於 y 加上一般買權在K_1及K_2間的價值〔即$y+(S_T-K_1)$〕。

局部支付型權證的評價模型可根據公式（12）到期時的價值（或現金流量）推導出評價模型。運用 Martingale Pricing 及 Girsanov Theorem，該權證的評價模型可表示如下：（詳見附錄二的推導）

$$\begin{aligned}C&=e^{-rT}E^{Q}\left\{[y+\alpha(S_T-K_1)]1_{\{K_1\le S_T\le K_2\}}\right\}\\&=e^{-rT}\left\{(y-\alpha K_1)E^{Q}\left[1_{\{K_1\le S_T\le K_2\}}\right]+\alpha E^{Q}\left[S_T1_{\{K_1\le S_T\le K_2\}}\right]\right\}\\&=e^{-rT}(y-\alpha K_1)\left[N(d_{1,1}^{*})-N(d_{1,2}^{*})\right]+\alpha Se^{-qT}\left[N(d_{1,1})-N(d_{1,2})\right]\end{aligned}\qquad (13)$$

此處：$d_{1,1}=\dfrac{\ln(S/K_1)+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$

$$d_{1,2}=\frac{\ln(S/K_2)+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_{1,1}^{*}=\frac{\ln(S/K_1)+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}=d_{1,1}-\sigma\sqrt{T}$$

$$d_{1,2}^{*}=\frac{\ln(S/K_2)+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}=d_{1,2}-\sigma\sqrt{T}$$

因局部支付型權證的評價模型包含很容易計算的常態分配機率 $N(\cdot)$，權利金的計算極度快速。

局部支付型權證的避險參數可由（13）直接微分推導出，表示如下：(詳見附錄四的推導)

$$\Delta=\frac{\partial C}{\partial S}=e^{-rT}(y-\alpha K_1)\left[\frac{n(d_{1,1}^{*})-n(d_{1,2}^{*})}{S\sigma\sqrt{T}}\right]+\alpha e^{-qT}\left[\frac{n(d_{1,1})-n(d_{1,2})}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$
$$+\alpha e^{-qT}\left[N(d_{1,1})-N(d_{1,2})\right]\qquad (K_1\le S\le K_2)\qquad \text{(14a)}$$

$$\Gamma=\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}=e^{-rT}(y-\alpha K_1)\left[\frac{n(d_{1,2}^{*})\left(d_{1,2}^{*}+\sigma\sqrt{T}\right)-n(d_{1,1}^{*})(d_{1,1}^{*}+\sigma\sqrt{T})}{\sigma^2S^2T}\right]$$
$$+\alpha e^{-qT}\left[\frac{-n(d_{1,1})d_{1,1}+n(d_{1,2})d_{1,2}}{\sigma^2S\sqrt{T}}\right]+\alpha e^{-qT}\left[\frac{n(d_{1,1})-n(d_{1,2})}{\sigma S\sqrt{T}}\right]$$
$$(K_1\le S\le K_2)\qquad \text{(14b)}$$

$$Vega=\frac{\partial C}{\partial\sigma}=e^{-rT}(y-\alpha K_1)\left[n(d_{1,1}^{*})(1-\frac{d_{1,1}^{*}}{\sigma\sqrt{T}})-n(d_{1,2}^{*})(1-\frac{d_{1,2}^{*}}{\sigma\sqrt{T}})\right]\sqrt{T}$$
$$+\alpha Se^{-qT}\left[n(d_{1,1})(1-\frac{d_{1,1}}{\sigma\sqrt{T}})-n(d_{1,2})(1-\frac{d_{1,2}}{\sigma\sqrt{T}})\right]\sqrt{T}\qquad K_1\le S\le K_2$$
$$\text{(14c)}$$

<u>避險跳躍的實務困難</u>

雖然以上的避險參數（Δ，Γ及$Vega$）可經由（14）求解，但就實務層面而言，避險者會遭遇到 Delta 斷裂（或跳躍）的困難。觀察圖三可知，當股價尚未上升至 K_1 時，並不需要避險部位（$\Delta=0$，因該權證尚無現金流量)。但當

股價上升至K_1時，避險部位立即生效（根據(14a)式計算，$\Delta>0$）。因此，股價在K_1之前後就會有 Delta 跳躍的現象。實務避險操作很難應付 Delta 跳躍，即由避險零部位可能立即跳躍成為正避險部位（$\Delta>0$，若股價持續向上升）。但若股價迫近K_1，卻不是往上升，而是再度回檔，則仍是維持避險零部位。但避險者無法預知，當股價迫近K_1時，股價是否會持續上升或回檔。在這個時候，避險者只有按照主觀判斷股價的走勢，來進行避險操作，這也就是實務界所謂的投機性避險（Speculative Hedge），而不是純粹學理的避險。投機性避險的可能情況例舉如下：

> 當股價迫近K_1時，若主觀判斷往上攻堅的可能性大，則可建立部分（或全部）的避險部位。若判斷正確，則不會產生高價搶進避險部位所需的股票。但判斷可能會有錯誤，股價回檔，則原先建立的避險部位股票會有價格損失。主觀判斷短期股價走勢是一種投機性行為，故這種避險可稱為投機性避險。這是實務避險操作所無法避免的困難。

另一種 Delta 跳躍發生於，股價已在K_1及K_2間，股價可能往上迫近K_2（仍是維持避險部位），但股價是否會再往上升超過K_2，若會，則避險部位變成零。若不會，則仍應維持避險部位。此種情況的避險部位仍是基於主觀判斷當時股價的走勢。因此又是投機性避險的另一種情況。這種 Delta 跳躍的困難是理論無法解決的，只有端賴避險交易員的多年經驗才能應付此種跳躍式的困難。因此，財務工程是一門科學（Science），但財務工程的應用卻是一門藝術（Art）。財務工程兼具科學與藝術兩方面的有趣學科。

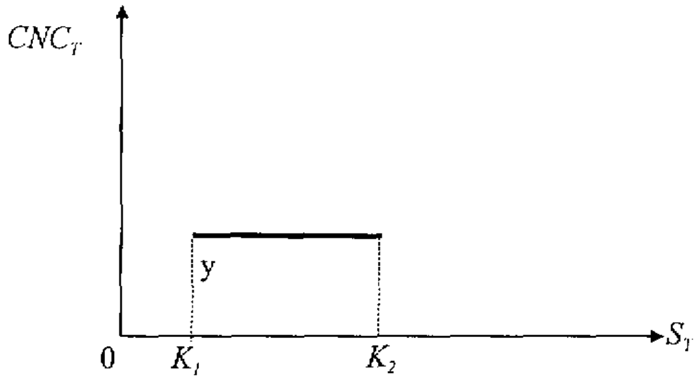
公式(13)是局部支付型權證的綜合評價模型。該權證會因α的不同設定而產生不同有趣的權證。我們介紹其中兩種權證如下：

（一）當$\alpha=0$，局部支付型權證變成兌現或無兌現權證（Cash-or-Nothing Call，簡稱CNC）。其到期日現金流量成為

$$CNC_T=\begin{cases} y & \text{若}\quad K_1\le S_T\le K_2 \\ 0 & \text{若}\quad S_T<K_1 \text{ 或 } S_T>K_2 \end{cases}$$

只有當標的價格介於 K_1 及 K_2 之間，*CNC* 權證才支付固定金額 y。以圖四表示如下：

圖四 兌現或無兌現權證



CNC 的評價公式可將(13)內的 α 設定為零即得

$$CNC = e^{-rT} y\left[N(d_{1,1}^{*}) - N(d_{1,2}^{*})\right] \tag{15}$$

其避險參數也可由公式(14)很容易求出（令 α=0）

$$\Delta = \frac{\partial CNC}{\partial S} = e^{-rT} y\left[\frac{n(d_{1,1}^{*}) - n(d_{1,2}^{*})}{S\sigma\sqrt{T}}\right], \quad K_1 \le S \le K_2 \tag{16a}$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 CNC}{\partial S^2} = e^{-rT} y\left[\frac{n(d_{1,2}^{*})(d_{1,2}^{*} + \sigma\sqrt{T}) - n(d_{1,1}^{*})(d_{1,1}^{*} + \sigma\sqrt{T})}{\sigma^2 S^2 T}\right]$$

(16b)

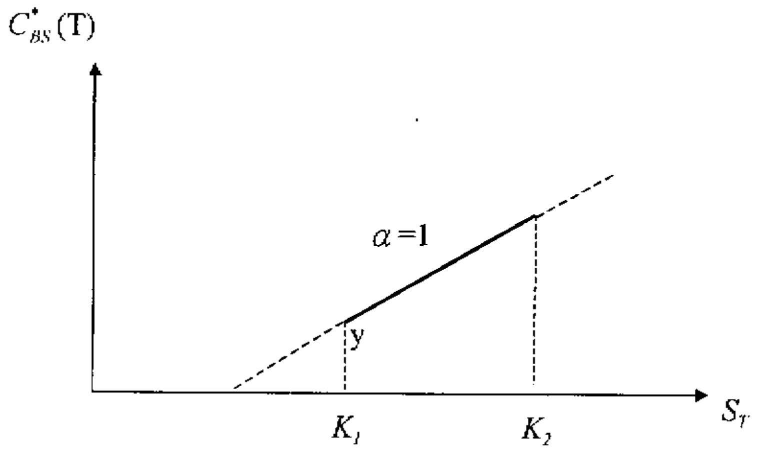
$$Vega = \frac{\partial CNC}{\partial \sigma} = e^{-rT} y\left[n(d_{1,1}^{*})(1 - \frac{d_{1,1}^{*}}{\sigma\sqrt{T}}) - n(d_{1,2}^{*})(1 - \frac{d_{1,2}^{*}}{\sigma\sqrt{T}})\right]\sqrt{T}$$

(16c)

（二）令$\alpha=1$，則局部支付型權證變成為一般歐式 Black-Scholes 買權的局部支付權證（以C^*_{BS}稱之）。

以圖五表示如下：

圖五 局部支付 Black-Scholes 買權之到期現金流量



其到期日現金流量為：

$$C^*_{BS}(T)=\begin{cases} y+S_T-K_1 & 若\ K_1\le S_T\le K_2 \\ 0 & 若不是 \end{cases}$$

C^*_{BS}的評價公式如下：(在（13）內，令$\alpha=1$)

$$C^*_{BS}=e^{-rT}(y-K_1)\left[N(d^*_{1,1})-N(d^*_{1,2})\right]+Se^{-qT}\left[N(d_{1,1})-N(d_{1,2})\right] \qquad (17)$$

其避險參數則為公式(14a)、(14b)、(14c)，並令$\alpha=1$，在此不再重複。α值設定大於 1，則結果的權證價值會大於(17)所示C^*_{BS}的價格。

四、抵付型權證

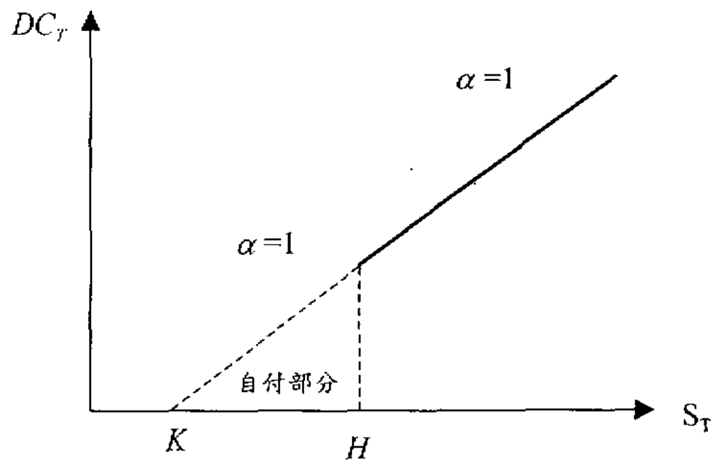
抵付型權證（Deductible Calls，以 DC 簡稱）到期時的現金流量為：

$$DC_T=\begin{cases} 0 & 若\ S_T<K \\ 0 & 若\ K\le S_T\le H \\ S_T-K & 若\ H<S_T \end{cases} \qquad (18)$$

K=履約價格

當 $S_T<K$ 時，此類型權證(DC)無現金流量，與一般歐式買權相同。但當 $K\leq S_T\leq H$ 時，此權證也不支付任何現金。這不同於一般買權，一般買權的現金流量則為 S_T-K。因為在初步獲利階段該權證不支付任何現金，只有當標的股價格 S_T 高於 H 時，才開始支付現金，此種現金流量正如汽車保險或火險在損失的最初固定金額內，保險公司不支付任何賠償金。但當損失大於某一固定金額 H 時，才支付保險金。因此保險費（權利金支付）可降低。自付的部分越高，保險費也就越低（或權利金越低)。因此，我們稱該類型的權證為抵付型權證。以圖六表示其到期價值如下：

圖六　　抵付型權證的到期價值



根據抵付型權證的到期價值，權利金的決定是一般 BS 模型價格減掉最初抵付（或自付）部分的權利金。以公式表示如下：

$$DC = Se^{-qT}N(X_1) - Ke^{-rT}N(X_2) - e^{-rT}E^Q\left[(S_T-K)1_{\{K\leq S_T\leq H\}}\right] \tag{19}$$

此處：$X_1 = \dfrac{\ln(S/K)+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$，$X_2 = X_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}}$

自付部分權利金（期望值部分）可由（13）直接求出，並令 $\alpha=1$，y=0，$K_1=K$，$K_2=H$：

$$\begin{aligned} e^{-rT}E^Q\left[(S_T-K)1_{\{K\leq S_T\leq H\}}\right] &= -e^{-rT}K\left[N(X_2)-N(Y_2)\right] \\ &\quad + Se^{-qT}\left[N(X_1)-N(Y_1)\right] \end{aligned} \tag{20}$$

此處： $Y_1 = \dfrac{\ln(S/H) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T}{\sigma\sqrt{T}}$ ， $Y_2 = Y_1 - \sigma\sqrt{T}$

將（20）代入（19）即得抵付型權證的評價模型如下：

$$DC = Se^{-qT}N(X_1) - Ke^{-rT}N(X_2) - Se^{-qT}\left[N(X_1) - N(Y_1)\right] + e^{-rT}K\left[N(X_2) - N(Y_2)\right]$$
$$= Se^{-qT}N(Y_1) - Ke^{-rT}N(Y_2) \tag{21}$$

此評價模型其實是歐式買權的 BS 評價模型，雖然權證的履約價格是 K，但因自付部分，標的價格必須高於 H 時，權證的價值才能增加，且等於 $S_T - H$。因此抵付型權證可視為另一種履約價格 H 高於原有履約價格 K 的權證。相對於 H 而言，它是一個價外權證。

抵付型權證避險參數的推導正如 BS 模型避險參數，因此可以直接表示如下：（詳見附錄五）

$$\Delta = \frac{\partial DC}{\partial S} = e^{-qT}N(Y_1) + (H - K)e^{-rT} \cdot n(Y_2) \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} \tag{21a}$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 DC}{\partial S^2} = e^{-qT}n(Y_1) \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} - (H - K)e^{-rT}n(Y_2)\frac{1}{S^2\sigma\sqrt{T}}\left[1 + \frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}}\right] \tag{21b}$$

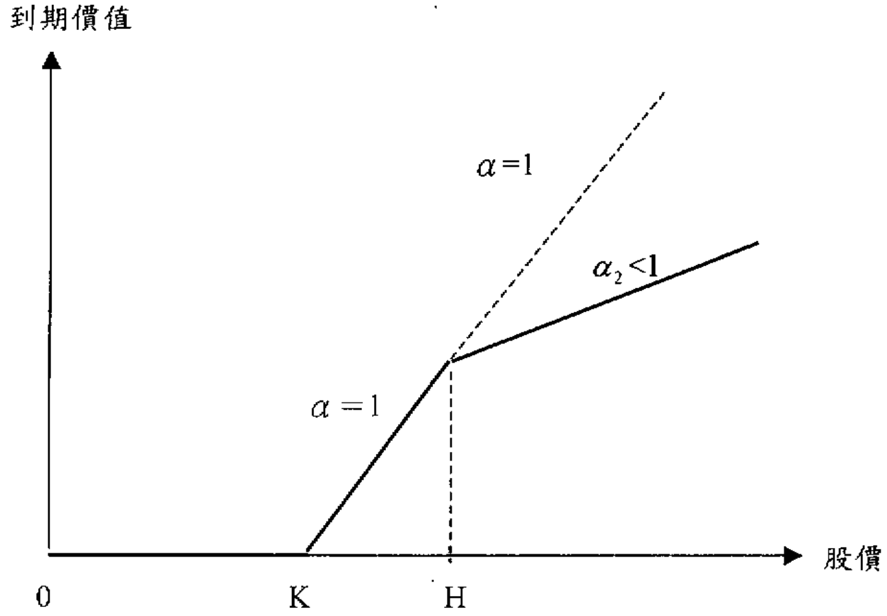
$$Vega = \frac{\partial DC}{\partial \sigma} = Se^{-qT}n(Y_1)(1 - \frac{Y_1}{\sigma\sqrt{T}}) - Ke^{-rT}n(Y_2)(1 - \frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}})\sqrt{T} \tag{21c}$$

其他類型的權證可由局部支付型權證評價模型（13）內的 α 加以變化，拼湊在一起成為降低權利金的權證創新。我們在此舉例其中兩種類型。

五、變化類型權證之一

此種權證的到期日價值可由圖七表示如下：

圖七：變化類型權證之一的到期日價值



以公式表示其價值如下：

$$C_T=\begin{cases}0 & \text{若} \quad S_T\le K\\ (S_T-K) & \text{若} \quad K<S_T\le H\\ \alpha_2(S_T-K) & \text{若} \quad S_T>H \quad ,\alpha_2<1\end{cases} \tag{22}$$

此種權證的履約價為K。若到期時S_T介於K及H之間，其價值為S_T-K；若$S_T>H$，其價值為$\alpha_2(S_T-K)$，$\alpha_2<1$。

其評價模型的推導如下：

$$C=e^{-rT}E^Q\left[(S_T-K)1_{\{K<S_T\le H\}}\right]+\alpha_2e^{-rT}E^Q\left[(S_T-K)1_{\{S_T>H\}}\right] \tag{23}$$

第一個期望值是公式(13)的一種特殊情況：y=0，α =1，K_1 =K，K_2=H。因此，

$$
\begin{aligned}
& e^{-rT}E^{Q}\left[(S_T-K)1_{\{K<S_T\le H\}}\right] \\
&= Se^{-qT}\left[N(d_{1,1})-N(d_{1,2})\right]-Ke^{-rT}\left[N(d_{1,1}^{*})-N(d_{1,2}^{*})\right] \qquad (24)
\end{aligned}
$$

第二個期望值其實是α_2乘以抵付型權證的價值（公式（21））。因此，將此（21）及（24）代入（23）即得最後的評價公式：

$$
\begin{aligned}
C &= Se^{-qT}\left[N(d_{1,1})-N(d_{1,2})\right]-Ke^{-rT}\left[N(d_{1,1}^{*})-N(d_{1,2}^{*})\right]+\alpha_2\left[Se^{-qT}N(Y_1)-Ke^{-rT}N(Y_2)\right] \\
&= Se^{-qT}\left[N(d_{1,1})-N(d_{1,2})+\alpha_2 N(Y_1)\right]-Ke^{-rT}\left[N(d_{1,1}^{*})-N(d_{1,2}^{*})+\alpha_2 N(Y_2)\right] \\
&= Se^{-qT}\left[N(X_1)-(1-\alpha_2)N(Y_1)\right]-Ke^{-rT}\left[N(X_2)-(1-\alpha_2)N(Y_2)\right] \\
&= [Se^{-qT}N(X_1)-Ke^{-rT}N(X_2)]-(1-\alpha_2)[Se^{-qT}N(Y_1)-Ke^{-rT}N(Y_2)] \qquad (25)
\end{aligned}
$$

此處：$d_{1,1}=\dfrac{\ln(S/K)+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}=X_1$ ，$d_{1,2}=\dfrac{\ln(S/H)+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}=Y_1$，

$d_{1,1}^{*}=d_{1,1}-\sigma\sqrt{T}=X_1-\sigma\sqrt{T}=X_2$ ， $d_{1,2}^{*}=d_{1,2}-\sigma\sqrt{T}=Y_1-\sigma\sqrt{T}=Y_2$

根據（25）該權證的避險參數為：

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial C}{\partial S} \\
&= e^{-qT}N(X_1)-(1-\alpha)\left[e^{-qT}N(Y_1)+(H-K)e^{-rT}n(Y_2)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right] \quad ,d_1=X_1 \qquad (26a)
\end{aligned}
$$

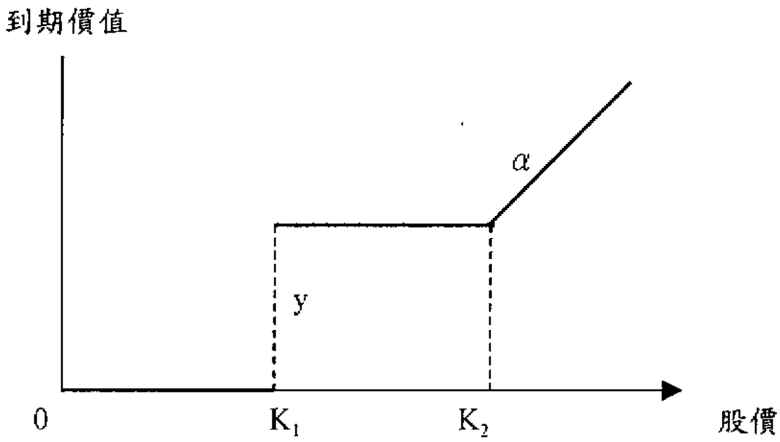
$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \\
&= e^{-qT}\frac{n(X_1)}{S\sigma\sqrt{T}}-(1-\alpha)\left[e^{-qT}\frac{n(Y_1)}{S\sigma\sqrt{T}}-(H-K)e^{-rT}\frac{n(Y_2)}{S^2\sigma\sqrt{T}}\left(1+\frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \qquad (26b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Vega &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} \\
&= \left[Ke^{-rT}\sqrt{T}n(X_1)\right]-(1-\alpha)\left[Se^{-qT}n(Y_1)\left(1-\frac{Y_1}{\sigma\sqrt{T}}\right)\sqrt{T}-Ke^{-rT}n(Y_2)\left(-1-\frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}}\right)\sqrt{T}\right] \quad (26c)
\end{aligned}
$$

六、變化類型權證之二

此種權證的到期日價值可由圖八表示如下：

圖八　變化類型權證之二



以公式表示其價值如下：

$$C_T = \begin{cases} 0 & \text{若 } S_T < K_1 \\ y & \text{若 } K_1 \le S_T \le K_2 \\ \alpha\,(S_T - K_1) & \text{若 } S_T > K_2 \end{cases}$$

此種權證的現在價格其實是兌現或無兌現型權證（Cash-or-Nothing calls）的價格(15)加上抵付型權證價格(21)之和。因此，其評價模型為：

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT}E^{Q}\left[y1_{\{K_1 \le S_T \le K_2\}}\right] + e^{-rT}E^{Q}\left[\alpha(S_T - K_2)1_{\{S_T > K_2\}}\right] \\ &= e^{-rT}y\left[N(d_{1,1}^{*}) - N(d_{1,2}^{*})\right] + \alpha[Se^{-qT}N(Y_1^{*}) - Ke^{-rT}N(Y_2^{*})] \\ &= \alpha[Se^{-qT}N(Y_1^{*}) - K_1e^{-rT}N(Y_2^{*}) + e^{-rT}y\left[N(X_2) - N(Y_2)\right] \end{aligned} \quad (27)$$

此處：$d_{1,1}^{*} = X_2$，$d_{1,2}^{*} = Y_2$

$$Y_1^{*} = \frac{\ln(\mathrm{S/K_2}) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_2^{*} = Y_1^{*} - \sigma\sqrt{T}$$

最後，我們補充如下：基於局部支付型權證，我們可組合不同類型的現金流量成為另一種降低權利金的新權證或其他吸引投資人興趣的新權證。讀者可自行嘗試創新。

參、結論

在本論文中，我們已將可以降低權利金的幾種新權證加以介紹，並以 Martingale Pricing 的方法推導出各種新權證的封閉解評價模型，也同時報告相關的避險參數。對於這些新權證在實務避險操作時所面臨的 Delta 跳躍困難也提供一些實務因應之道（投機性的避險）。

發行券商可依據每一新權證特有的到期現金流量設計創新適合投資人需求的新權證。同時兼顧目前國內嚴謹的法令，創新的權證最好盡量屬於 Black-Scholes 範圍內的簡單選擇權，才不至受礙於法令而無法發展。希望本論文能進一步引發業界及學術界在這方面的興趣，創新更多低權利金的各種權證，使投資人受益。

附錄

The 1st component of (7) $= E^Q\left[(S_T - K_1)1_{\{K_1<S_T<k_2\}}\right]$

$$= E^Q\left[S_T 1_{\{k_1<S_T<k_2\}}\right] - K_1 E^Q\left[1_{\{K_1<S_T<k_2\}}\right]$$

But then

$$E^Q\left[S_T 1_{\{k_1<S_T<k_2\}}\right]$$

$$= E^Q\left\{S\exp\left[(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\left(w_T - w_0\right)\right]1_{\{K_1<S_T<K_2\}}\right\}$$

$$= Se^{(r-q)T}E^Q\left\{e^{\frac{-\sigma^2 T}{2}+\sigma\Delta w_T}1_{\{K_1<S_T<K_2\}}\right\} \quad ,\Delta w_T = w_T - w_0$$

where we let $\xi_T = e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}+\sigma\Delta w_T} = e^{\int_0^T \sigma dw_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 ds}$ *which is a Girsanov factor.*

A change of measure from Q to R : $dw^Q = dw^R + \sigma dt$

$$\therefore \frac{ds}{s} = (r-q)dt + \sigma\, dw^Q = (r-q)dt + \sigma\left(dw^R + \sigma\, dt\right)$$

$$= (r-q+\sigma^2)dt + \sigma\, dw^R$$

$$\therefore d\ln S_T = (r-q-\frac{\sigma^2}{2})dt \quad + \sigma\, dw^Q$$

$$= (r-q-\frac{\sigma^2}{2})dt \quad + \sigma\,(dw^R + \sigma dt)$$

$$= (r-q+\frac{\sigma^2}{2})dt \quad + \sigma\, dw^R$$

The Itô integral of the above stochastic differential equation (SDE) gives

$$\therefore S_T = S\exp\left[(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\,\Delta w_T^R\right] \quad ,\Delta w_T^R = w_T^R - w_0^R \sim N(0,T)$$

Thus, usiing Girsanov theorem ,the expectation becomes

一、公式（8）的證明如下：

$$\overset{Girsanov}{=} Se^{(r-q)T}E^{R}\left[1_{\{K_1<S_T<K_2\}}\right] \quad ,E^{R}(\bullet)\ is\ taken\ with\ respect\ to\ R\ measure$$

$$=Se^{(r-q)T}P_r^R\left[K_1<Se^{(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\Delta w_T^R}<K_2\right]$$

$$=Se^{(r-q)T}P_r^R\left[\frac{\ln(K_1/S)-(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}<\frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}}<\frac{\ln(K_2/S)-(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$=Se^{(r-q)T}P_r^R\left[\underbrace{\frac{\ln(S/K_2)+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_2^*}<-\frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}}<\underbrace{\frac{\ln(S/K_1)+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_1^*}\right]$$

$$=Se^{(r-q)T}\left[N(d_1^*)-N(d_2^*)\right] \quad , \quad -\frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}}\sim N(0,1)$$

$Next$, $E^{Q}\left[1_{\{K_1<S_T<K_2\}}\right]=P_r^Q\left[K_1<S_T<K_2\right]$

$$=P_r^Q\left(K_1<S\exp\left[(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\overbrace{(w_T^Q-w_0^Q)}^{\Delta w_T^Q}\right]<K_2\right)$$

where under $Q\,measure$ (測度)

$$S_T=S\exp\left[(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma(w_T^Q-w_0^Q)\right]$$

$$=P_r^Q\left(\frac{\ln(K_1/S)-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}<\frac{\Delta w_T^Q}{\sqrt{T}}<\frac{\ln(K_2/S)-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$=P_r^Q\left(\underbrace{\frac{\ln(S/K_2)+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_2'}<-\frac{\Delta w_T^Q}{\sqrt{T}}<\underbrace{\frac{\ln(S/K_1)+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_1'}\right)$$

$$=N(d_1')-N(d_2') , \quad -\frac{\Delta w_T^Q}{\sqrt{T}}\sim N(0,1)$$

Also，

$$E^{Q}\left[(K_2-K_1)1_{\{S_T>K_1\}}\right]$$

$$=(K_2-K_1)\,P_r^{Q}(S_T\ge K_2)$$

$$=(K_2-K_1)\,P_r^{Q}\left[S\,e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\,\Delta w_T^{Q}}\ge K_2\right]$$

$$=(K_2-K_1)\,P_r^{Q}\left[\frac{\Delta w_T^{Q}}{\sqrt{T}}\ge\frac{\ln(K_2/S)-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$=(K_2-K_1)\;P_r^{Q}\left[-\frac{\Delta w_T^{Q}}{\sqrt{T}}<\underbrace{\frac{\ln(S/K_2)+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_2'}\right]$$

$$=(K_2-K_1)\,N(d_2')$$

$$\begin{aligned}\textit{Thus}\quad C&=\mathrm{e}^{-rT}\left\{Se^{(r-q)T}\left[N(d_1^{*})-N(d_2^{*})\right]-K_1\left[N(d_1')-N(d_2')\right]\right\}+\mathrm{e}^{-rT}\left\{(K_2-K_1)N(d_2')\right\}\\&=S\mathrm{e}^{-qT}\left[N(d_1^{*})-N(d_2^{*})\right]+\mathrm{e}^{-rT}\left[K_2N(d_2')-K_1N(d_1')\right]\end{aligned}$$

這也就是公式 (8) 。

二、公式(9)，(10)及(11)的推導

$$\frac{\partial N(d_1^*)}{\partial S}=n(d_1)\frac{\partial d_1^*}{\partial S}=\frac{n(d_1^*)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Delta=\frac{\partial C}{\partial S}$$

$$=e^{-qT}[N(d_1^*)-N(d_2^*)]+Se^{-qT}[\frac{n(d_1^*)}{S\sigma\sqrt{T}}-\frac{n(d_2^*)}{S\sigma\sqrt{T}}]+e^{-rT}[K_2\frac{n(d_2')}{S\sigma\sqrt{T}}-K_1\frac{n(d_1')}{S\sigma\sqrt{T}}]$$

$$=e^{-qT}[N(d_1^*)-N(d_2^*)]+e^{-qT}[\frac{n(d_1^*)-n(d_2^*)}{\sigma\sqrt{T}}]+e^{-rT}[\frac{K_2n(d_2')-K_1n(d_1')}{S\sigma\sqrt{T}}]$$

$=e^{-qT}[N(d_1^*)-N(d_2^*)]$，最後兩項可對消掉

又 $\frac{\partial n(d_1^*)}{\partial S}=\frac{\partial}{\partial S}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^{*2}/2}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^{*2}/2}\cdot\frac{-1}{2}\frac{\partial}{\partial S}(d_1^{*2})$

$$=\frac{-1}{2}n(d_1^*)\cdot 2d_1^*\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}=-\frac{n(d_1^*)d_1^*}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\therefore\Gamma=\frac{\partial^2C}{\partial S^2}=e^{-qT}[\frac{n(d_1^*)-n(d_2^*)}{S\sigma\sqrt{T}}]+e^{-qT}[\frac{-n(d_1^*)d_1^*+n(d_2^*)d_2^*}{S\sigma^2T}]$$

$$+e^{-rT}[\frac{S\sigma\sqrt{T}(-K_2n(d_2')d_2'+K_1n(d_1')d_1')-\sigma\sqrt{T}(K_2n(d_2')-K_1n(d_1'))}{S^2\sigma^2T}]$$

$$\frac{\partial N(d_1^*)}{\partial\sigma}=n(d_1^*)\frac{\partial d_1^*}{\partial\sigma}=n(d_1^*)[\frac{\sigma\sqrt{T}(\sigma T)-(\ln(S/K_1)+(r-q+\sigma^2/2)T)\sqrt{T}}{\sigma^2T}]$$

$$=n(d_1^*)[\sqrt{T}-\frac{\ln(S/K_1)+(r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\frac{\sigma\sqrt{T}\sqrt{T}}{\sigma^2T}]$$

$$=n(d_1^*)[1-d_1^*/\sigma\sqrt{T}]\sqrt{T}$$

$$Vega=Se^{-qT}\sqrt{T}\left[N(d_1^*)-N(d_2^*)\right]$$

三、公式(13)的證明如下：

In a risk-neutral world, the stock price dynamics is given by $ds_t / s_t = (r-q)dt + \sigma\, dw^Q$

$$\therefore d\ln(S_t / S) = (r - q - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma\, dw^Q$$

$$\Rightarrow S_t = S\exp\left[(r - q - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\, \overbrace{(w_t^Q - w_0^Q)}^{\Delta w_t^Q}\right]$$

我們首先推導(13)內的第一個期望值如下：

$$
\begin{aligned}
& E^R\left[1_{\{K_1 < S_t < K_2\}}\right] \\
& = P_r\left[K_1 < S_T < K_2\right] \\
& = P_r\left[\ln(K_1 / S) < \ln(S_T / S) < \ln(K_2 / S)\right] \\
& = P_r\left[\frac{\ln(K_1 / S) - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} < \frac{\Delta w^Q}{\sqrt{T}} < \frac{\ln(K_2 / S) - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\
& = P_r\left[\underbrace{\frac{\ln(S / K_1) + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_{1,1}^*} > -\frac{\Delta w^Q}{\sqrt{T}} > \underbrace{\frac{\ln(S / K_2) + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_{1,2}^*}\right] \\
& = N(d_{1,1}^*) - N(d_{1,2}^*) \qquad \left[-\frac{\Delta w^Q}{\sqrt{T}} \sim N(0,1)\right]
\end{aligned}
$$

再次計算(13)內的第二個期望值如下：

$$
\begin{aligned}
& E^Q\left[S_T 1_{\{K_1 \le S_T \le K_2\}}\right] \\
& = E^Q\left\{S\exp\left[(r - q - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\,(w_T^Q - w_0^Q)\right]1_{\{K_1 \le S_T \le K_2\}}\right\} \\
& = Se^{(r-q)T} E^Q\left\{e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\,(w_T^Q - w_0^Q)} 1_{\{K_1 \le S_T \le K_2\}}\right\}, \text{under Q measure}
\end{aligned}
$$

$$Let \quad \xi_T = e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma(w_T^Q - w_0^Q)} = e^{\int_0^T \sigma\, dw_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 ds} \Rightarrow \xi_T \text{ is } Girsanov\ factor$$

$$\therefore \quad dw^Q = dw^R + \sigma\, dt$$

$$d\ln(S_t / S) = (r - q - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dw^Q$$

$$= (r - q - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma(\ dw^R + \sigma\ dt)$$

$$= \quad (r - q + \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma\ dw^R$$

$$\Rightarrow S_t = S\exp\left[(r - q + \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma(w_t^R - w_0^R)\right]$$

利用$Girsanov\ \ theorem$,第二個期望值成為

$$\overset{Girsanov}{=} \quad S\, e^{(r-q)T} E^R\left[1_{\{K_1 < S_T < K_2\}}\right] \quad ,under\ R\ measure$$

$$= \quad S\, e^{(r-q)T} P_r^R\left[K_1 < S_T < K_2\right]$$

$$= \quad S\, e^{(r-q)T} P_r^R\left[\ln(K_1/S) < \ln(S_T/S) < \ln(K_2/S)\right]$$

$$= \quad S\, e^{(r-q)T} P_r^R\left[\frac{\ln(K_1/S) - (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} < \frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}} < \frac{\ln(K_2/S) - (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$= \quad S\, e^{(r-q)T} P_r^R\left[\underbrace{\frac{\ln(S/K_1) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_{1,1}} > -\frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}} > \underbrace{\frac{\ln(S/K_2) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_{1,2}}\right]$$

$$= \quad S\, e^{(r-q)T}\left[N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})\right]$$

$$Thus,\ C = e^{-rT}(y - \alpha K_1)\left[N(d_{1,1}^*) - N(d_{1,2}^*)\right] + \alpha\, Se^{-qT}\left[N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})\right]$$

四、公式(14a)及(14b)的推導

先求 (14a)：

$$\frac{\partial N(d_{1,1}^*)}{\partial S}=\frac{\partial N(d_{1,1}^*)}{\partial d_{1,1}^*}\frac{\partial d_{1,1}^*}{\partial S}=\frac{n(d_{1,1}^*)}{S\sigma\sqrt{T}} \qquad \because\ n(d_{1,1}^*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-d_{1,1}^{*\,2}}{2}}$$

$$\frac{\partial N(d_{1,2}^*)}{\partial S}=\frac{n(d_{1,2}^*)}{S\sigma\sqrt{T}} \quad,\quad n(d_{1,2}^*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-d_{1,2}^{*\,2}}{2}}$$

$$\frac{\partial N(d_{1,1})}{\partial S}=\frac{n(d_{1,1})}{S\sigma\sqrt{T}} \quad,\quad \frac{\partial N(d_{1,2})}{\partial S}=\frac{n(d_{1,2})}{S\sigma\sqrt{T}}$$

此處：

$$n(b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-b^2}{2}} \quad,\ b=d_{1,1}\ ,\ d_{1,2}\ ,\ d_{1,1}^*\ ,\ or\ \ d_{1,2}^*$$

將以上的偏微分代入 (14a) 即得 $\Delta(=\frac{\partial C}{\partial S})$

次求(14b)：

$$\frac{\partial^2 N(d_{1,1}^*)}{\partial S^2}=\frac{\frac{\partial n(d_{1,1}^*)}{\partial S}(\sigma S\sqrt{T})-n(d_{1,1}^*)(\sigma\sqrt{T})}{(\sigma S\sqrt{T})^2}, \quad where\ \frac{\partial n(d_{1,1}^*)}{\partial S}=\frac{\partial n(d_{1,1}^*)}{\partial d_{1,1}^*}\ \frac{\partial d_{1,1}^*}{\partial S}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-d_{1,1}^{*\,2}}{2}}(-\frac{1}{2})2\ d_{1,1}^*(\frac{1}{\sigma S\sqrt{T}})\right](\sigma S\sqrt{T})-n(d_{1,1}^*)(\sigma\sqrt{T})}{\sigma^2 S^2 T}$$

$$=-\frac{d_{1,1}^* n(d_{1,1}^*)+n(d_{1,1}^*)\sigma\sqrt{T}}{T\sigma^2 S^2}=\frac{-n(d_{1,1}^*)(d_{11}+\sigma\sqrt{T})}{T\sigma^2 S^2}$$

同樣的，

$$\frac{\partial^2 N(d_{1,2}^*)}{\partial S^2}=-\frac{d_{1,2}^* n(d_{1,2}^*)+n(d_{1,2}^*)\sigma\sqrt{T}}{T\sigma^2 S^2}$$

$$\frac{\partial n(d_{1,2})}{\partial S}=\frac{\partial n(d_{1,1})}{\partial d_{1,1}}\frac{\partial d_{1,1}}{\partial S}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_{1,1}^2/2}(\frac{-1}{2}\cdot 2d_{1,1})\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$=-n(d_{1,1})d_{1,1}/(S\sigma\sqrt{T})$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}=e^{-rT}(y-\alpha K_1)\left[\frac{d_{1,2}^{*}n(d_{1,2}^{*})-d_{1,1}^{*}n(d_{1,1}^{*})+(n(d_{1,2}^{*})-n(d_{1,1}^{*}))\sigma\sqrt{T}}{T\sigma^2 S^2}\right]$$
$$+\alpha e^{-qT}\left[\frac{-n(d_{1,1})d_{1,1}+n(d_{1,2})d_{1,2}}{S\sigma^2 T}\right]$$
$$+\alpha e^{-qT}\left[\frac{n(d_{1,1})-n(d_{1,2})}{S\sigma\sqrt{T}}\right] \quad \text{,簡化即是}(14b)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma}=e^{-rT}(y-\alpha K_1)\left[n(d_{1,1}^{*})(1-d_{1,1}^{*}/\sigma\sqrt{T})\sqrt{T}-n(d_{1,2}^{*})(1-d_{1,2}^{*}/\sigma\sqrt{T})\sqrt{T}\right]$$
$$+\alpha Se^{-qT}\left[n(d_{1,1})(1-d_{1,1}/\sigma\sqrt{T})\sqrt{T}-n(d_{1,2})(1-d_{1,2}/\sigma\sqrt{T})\sqrt{T}\right]$$

五、公式(21a)，(21b)及(21c)的推導

$$\Delta=\frac{\partial DC}{\partial S}=e^{-qT}N(Y_1)+Se^{-qT}\frac{\partial N(Y_1)}{\partial S}-Ke^{-rT}\frac{\partial N(Y_2)}{\partial S}$$
$$=e^{-qT}N(Y_1)+Se^{-qT}n(Y_1)\frac{\partial Y_1}{\partial S}-Ke^{-rT}n(Y_2)\frac{\partial Y_2}{\partial S}$$
$$(\because Se^{-qT}n(Y_1)=He^{-rT}n(Y_2))$$
$$=e^{-qT}N(Y_1)+Se^{-qT}n(Y_1)\frac{\partial Y_1}{\partial S}-He^{-rT}n(Y_2)\frac{\partial Y_2}{\partial S}+(H-K)e^{-rT}n(Y_2)\frac{\partial Y_2}{\partial S}$$
$$=e^{-qT}N(Y_1)+(H-K)e^{-rT}n(Y_2)\cdot\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Gamma=\frac{\partial^2 DC}{\partial S^2}=e^{-qT}n(Y_1)\cdot\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}+(H-K)e^{-rT}n(Y_2)\cdot\frac{-1}{S^2\sigma\sqrt{T}}$$
$$+(H-K)e^{-rT}\left(-Y_2\cdot n(Y_2)\cdot\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)\cdot\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$
$$=e^{-qT}n(Y_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}-(H-K)e^{-rT}n(Y_2)\cdot\frac{1}{S^2\sigma\sqrt{T}}\left[1+\frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$Vega=\frac{\partial^2 DC}{\partial \sigma}=Se^{-qT}n(Y_1)\cdot\frac{\partial Y_1}{\partial \sigma}-Ke^{-rT}n(Y_2)\cdot\frac{\partial Y_2}{\partial \sigma}$$
$$=Se^{-qT}n(Y_1)\cdot(1-\frac{Y_1}{\sigma\sqrt{T}})\sqrt{T}-Ke^{-rT}n(Y_2)\cdot(1-\frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}})\sqrt{T}$$