參、研究模型建立

本章分為資產面、負債面現金流量模擬的模型介紹、模擬過程，及建立目標函數四節。第一節資產面現金流量模擬部分，假設資產有三種投資工具，股票、債券、國外投資，其中利率以 Cox et al.（1985）的利率期間結構理論，來建構隨機利率產生的過程，並使用 Cholesky Decomposition 的方式處理各別資產間之相關性。第二節負債面現金流量模擬部分，假設保險公司單由利率變動型年金構成，並假設其解約率為四行庫兩年期平均定存利率與宣告利率之利差的反正切函數。第三節介紹模擬過程，詳細介紹各項資產面及負債面的現金流量的模擬步驟。第四節透過不同情境下求算出的破產機率及盈餘設定目標函數。

第一節　資產面現金流量模擬

假設保險公司期初資本在法定最低資本 20 億及 30 億的不同情境下，只開發利率變動型年金的保單，並於期初收到 9,000 筆 36 歲男性的 200 萬躉繳保費，將期初資本額及期初所收到的躉繳保費總額以 50%、25%及 25%比例依序投資於債券、股票及高風險高報酬的不動產三種標的，其中債券有 15 種分別是 1~15 年不同到期日的債券可供選擇，在此假設保險公司均勻投資在這 15 種債券上，即每種到期日債券的投資比例皆為債券投資比例 50%的 1/15，且每種債券到期後即於下一期期初依據當時的價格全數購買 15 年期的債券。

一、　利率模型

本文將以四行庫平均兩年期定期利率作為無風險利率r。由於 CIR 模型具有均數回歸（Mean Reversion）的特性，且在模擬未來利率趨勢的過程中，不會產生負值利率，較貼近市場實務。據此本文選擇以 CIR 模型做為利率模型，其模型假設如下：

$$dr = a \cdot (b - r) \cdot dt + \sigma_r \cdot \sqrt{r} \cdot dW_r \qquad (3.1)$$

$$dW_r = \varepsilon \sqrt{dt} \qquad (3.2)$$

$$\varepsilon \sim N(0,1) \qquad (3.3)$$

其中，a為利率歸復調整速度，b為長期平均利率水準，r為無風險利率，σ_r為無風險利率波動度，dW_r為利率瞬間變動的隨機誤差。為了模擬在 t 時間內的短期利率動態過程，利用下式中 t 時點到 t +1 時點的利率變動隨機過程求出未來每期的r。

$$r(t+1) = r(t) + a \cdot [b - r(t)] \cdot dt + \sigma_r \cdot \sqrt{r(t)} \cdot Z(t) \qquad (3.4)$$

$$Z(t) \sim N(0,1) \qquad (3.5)$$

其中$r(t)$表第 t 年期初之短期利率，只要給定起始利率r_0、利率歸復調整速度a、長期平均利率水準b、無風險利率波動度σ_r，最後利用電腦從標準常態分配隨機抽取$Z(t)$，就可以模擬未來的無風險利率。下表為本文在模擬過程中給定的參數值。

表 3-1　利率模型中給定組合Ⅰ的參數值

參數	r_0	a	b	σ_r
參數值	0.02	0.2	0.04	0.017

表 3-2　利率模型中給定組合Ⅱ的參數值

參數	r_0	a	b	σ_r
參數值	0.022	0.4	0.06	0.05

表 3-3　利率模型中給定組合Ⅲ的參數值

參數	r_0	a	b	σ_r
參數值	0.025	0.6	0.08	0.09

在 CIR 模型下，零息債券的評價公式為：

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r_t} \tag{3.6}$$

其中

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \tag{3.7}$$

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(a+\gamma)(T-t)}{2}}}{(\gamma+a)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma_r^2}} \tag{3.8}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2+2\sigma_r^2} \tag{3.9}$$

依據上列各式可求解出不同到期日的零息債券的價值。

二、　股價模型

本文假設股價服從幾何布朗運動如下式：

$$dS = S \cdot (\mu_s + r) \cdot dt + S \cdot \sigma_s \cdot dZ_s \quad (3.10)$$

$$dZ_s = \varepsilon \sqrt{dt} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon \sim N(0,1) \quad (3.12)$$

其中，S 代表股價，μ_s 代表平均股價報酬率，r 代表無風險利率，σ_s 代表股價報酬波動率，dZ_s 代表股價瞬間變動的隨機誤差。

只要給定起始股價 S_0、平均股價報酬率 μ_s、股價報酬波動率 σ_s，並代入模擬出的無風險利率 r，最後利用電腦從標準常態分配隨機抽取 ε，就可以模擬未來可能的股價。下表為本文在模擬過程中給定的參數值。

表 3-4　股價模型中給定組合Ⅰ的參數值

參數	S_0	μ_s	σ_s
參數值	107.94	0.05	0.2

表 3-5　股價模型中給定組合Ⅱ的參數值

參數	S_0	μ_s	σ_s
參數值	107.94	0.1	0.22

表 3-6　股價模型中給定組合Ⅲ的參數值

參數	S_0	μ_s	σ_s
參數值	107.94	0.2	0.25

三、 高風險高報酬不動產模型

高風險高報酬的不動產價格模型與股價模型相似如下：

$$dRE = RE \cdot (\mu_{RE} + r) \cdot dt + RE \cdot \sigma_{RE} \cdot dZ_{RE} \quad (3.13)$$

$$dZ_{RE} = \varepsilon \sqrt{dt} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon \sim N(0,1) \quad (3.15)$$

其中，RE 代表不動產價格，μ_{RE} 代表不動產價格平均報酬率、r 代表無風險利率，σ_{RE} 代表不動產價格報酬波動率，dZ_{RE} 代表不動產價格瞬間變動的隨機誤差。

給定起始不動產價格 RE_0 、不動產價格平均報酬率 μ_{RE} 、不動產價格報酬波動率 σ_{RE} ，並代入模擬出的無風險利率 r ，最後利用電腦從標準常態分配隨機抽取 ε，就可以模擬未來可能的不動產價格。下表為本文在模擬過程中給定的參數值。

表 3-7 不動產模型中給定組合Ⅰ的參數值

參數	RE_0	μ_{RE}	σ_{RE}
參數值	1,000	0.16	0.4

表 3-8 不動產模型中給定組合Ⅱ的參數值

參數	RE_0	μ_{RE}	σ_{RE}
參數值	1,000	0.22	0.42

表 3-9　不動產模型中給定組合Ⅲ的參數值

參數	RE_0	μ_{RE}	σ_{RE}
參數值	1,000	0.3	0.45

第二節　負債面現金流量模擬

保險公司的利率變動型年金的商品內容如下表 3-10。

表 3-10　利率變動型年金保單假設

商品	利率變動型年金（不分紅保單）
繳費方式	期初躉繳
投保限制	為簡化模型結構，假設9,000位被保險人皆為36歲男性
保額	躉繳保費200 萬，依給付期開始之保單價值準備金及當時之年金生命表折算每年給付金額
宣告利率	上月月初四行庫平均兩年期定存利率+0.5%，為該保單年度保單價值準備金的累積利率
預定利率	年金給付期開始之宣告利率
準備金利率	同宣告利率
累積期	20 年
給付期	保障給付 20 年，期初給付，給付期間無法解約
附加費用率	4%，只有期初收到保費時需支付
解約率	解約率假設為已考量死亡率後的解約率，為利差的反正切函數，上限 30%，下限 1%
解約費率	第一年解約需收 6%解約費用，之後不用，解約給付在年底
死亡率	年金生命表死亡率 90%，死亡給付在年底

責任準備金提存方式	以保單價值準備金 100%提存

下圖為該保單累積期及給付期示意圖。

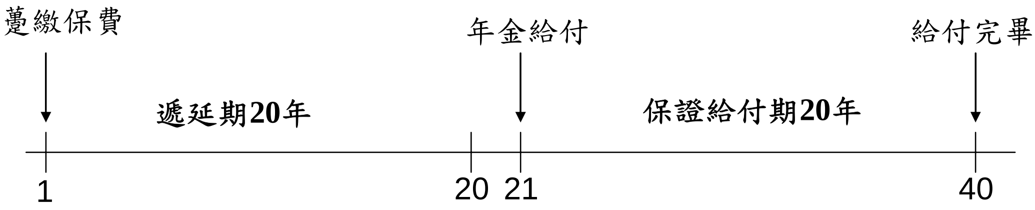

圖 3-1　利率變動型年金累積期及給付期示意圖

常見的年金解約函數是以解約率作為因變數，以利率差作為主要的自變數，保單特色和保戶性質以參數表示，函數型態為反正切函數。由於台灣缺乏實證資料，因此本文根據顏尚琴（2004）的解約函數修改為解約函數如下式：

$$Su\_R = 14.5 + 10 \times \tan^{-1}(17 \cdot Sp\_R - 7) \qquad \text{if } Sp\_R > 0 \qquad (3.16)$$

$$Su\_R = 0.01 \qquad \text{if } Sp\_R \le 0 \qquad (3.17)$$

其中 Su_R 為解約率，Sp_R 為利率差，即四行庫平均兩年期定存利率減宣告利率，並假設上、下限為 30%與 1%圖示其關係如下。

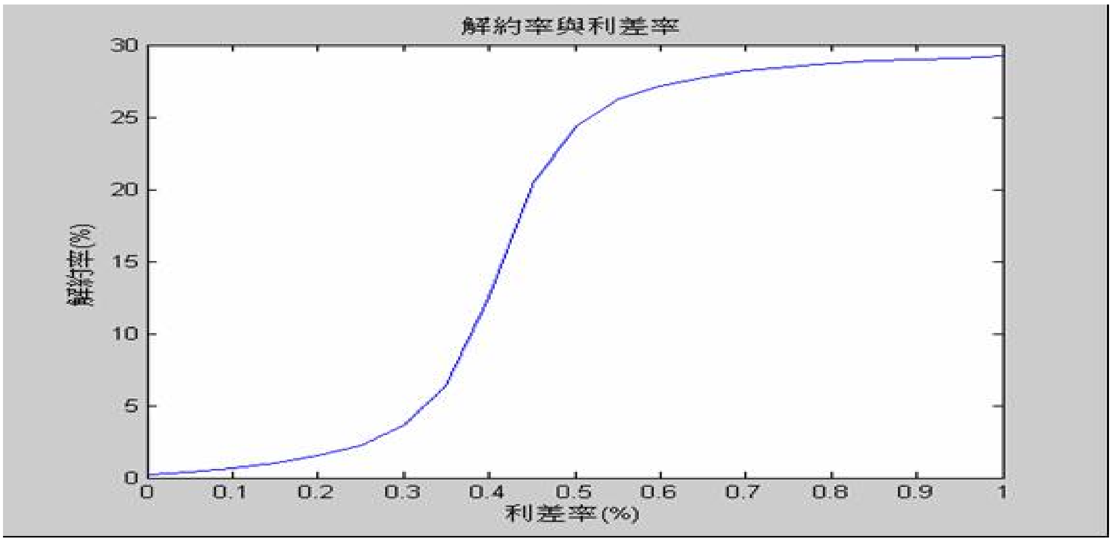

圖 3-2　解約率與利差率關係圖

第三節　模擬過程

本文利用 MATLAB 進行保險公司的資產負債現金流量模擬，模擬步驟如下：

1. 首先讀入保單資訊（保單期間、被保人年齡、90%年金生命表死亡率）、亂數表及各資產配置比率。此時保險公司第一期期初的資產負債表如下：

表 3-11　保險公司期初資產負債表（單位：億元）

資產	200	負債	180
		業主權益	20

2. 如第三章第一節的描述輸入各項資產面估計參數後，即可依據各資產的變動路徑模擬出四行庫兩年期平均定存利率的無風險利率、不同到期日債券價格、股價及不動產價格。

3. 依照保單的精算假設求算淨保費、死亡給付。並依據上述的無風險利率，加碼求得未來保單於累積期的每期宣告利率，值得注意的是保單當期的宣告利

率皆為上一期模擬出的無風險利率加碼而來，因此會有一期的落差。

4. 由宣告利率及淨保費計算利變型年金於累積期的保單價值準備金。
5. 利用無風險利率及宣告利率求出利率差，並代入解約率函數計算每期的解約率。由於解約率除了受到利率差的影響外，亦會受到其他非經濟因素的影響，因此將解約率設定在上限 30%，下限 1%的範圍內。最後再依據受限後的解約率、解約費用及保單價值準備金計算每期的解約給付。
6. 將累積期的保單價值準備金扣除死亡給付、解約給付後求得累積期的責任準備金。
7. 將第 20 期的保單價值準備金作為未來生存給付的現值，以第 21 期宣告利率為保單給付期的預定利率，計算未來每期的生存給付。
8. 將第 20 期的保單價值準備金依序扣除每期的生存給付，計算給付期責任準備金。
9. 利用期初資本額、淨保費收入、資產配置比率及資產期初價格計算期初各資產的持有單位，並透過模擬出的未來各期不同到期日債券價格、未來各期股價及未來各期不動產價格計算未來各期資產的每年年底價值及持有單位數。上述給付皆依照資產配置比率從各項資產中扣除。
10. 將各期資產的每年年初、年底價值加總，計算出總資產的每年年初、年底價值。
11. 將總資產的每年年末價值扣除累積期的責任準備金及給付期的責任準備

金，計算每年年末的盈餘。

12. 由每期盈餘計算 10,000 次模擬情境中的破產機率。

13. 將每期 10,000 個情境的盈餘取平均後，再各別折現回第一期期初，最後加總得到總盈餘。

14. 透過破產機率及總盈餘計算目標函數。

第四節　建立目標函數

本文欲探討在不同情境下，保險公司未來40年可能破產的機率($prob\_ruin$)及總盈餘（$Total\_Surplus$）。破產機率為保險公司在未來 40 年間的 10,000 次情境中，只要有一期的盈餘（$Surplus$）呈現負值，即表示破產。總盈餘是將每期 10,000 個情境的盈餘取平均後，再折現回第一期期初加總而來。因此在不同假設下，先求出保險公司於未來 40 年間模擬 10,000 次情況內的破產機率及總盈餘，並將目標函數設定如下：

$$ObjectFunction = {Total\_Surplus}\big/{Period} - \kappa \cdot \left(prob\_ruin - \lambda\right) \qquad (3.18)$$

其中 $Period$ 是保單期數，是 40 年。$\kappa = 25$ 億，$\lambda = 0.015$。

依據目標函數的抵換關係（Trade-off Relationship），本文可以利用敏感度分析觀察在不同策略下，找出影響保險公司營運的重要因素及其影響結果，提供保險公司的決策者在制定不同策略時可思考的方向。